المحاضرة النظرية الخامسة

سندرس في هذه المحاضرة الأفكار التالية :

1) بعض الأمثلة عن التطبيق الشاذ وغير الشاذ

2) بعض العمليات على التطبيق الخطي

3) المؤثرات الخاصة

4) بعض المبرهنات .

<u>مثال</u> أثبت أن التطبيق التالي هو تطبيق غير شاذ

$I : V \longrightarrow V$

$I(v) = v \; ; \; \forall v \in V$

نلاحظ أنه تطبيق غير شاذ لأن $\ker I = [\theta_v]$

<u>مثال</u> : ليكن لدينا التطبيق $O : V \longrightarrow V$

$O(v) = \theta_u \; ; \; \forall v \in V$

فهو تطبيق غير شاذ لأن $\ker O = V \neq [\theta_v]$

مبرهنة : إن الشرط اللازم والكافي حتى يكون التطبيق الخطي $f : V \longrightarrow U$ تطبيقاً خطياً غير شاذ هو أن يكون f متباين

<u>البرهان</u> : يتم برهان ذلك عبر خطوتين لزوم شرط وكفاية شرط

لزوم شرط : الفرض f غير شاذ $(\ker f = [\theta_v])$

$(\Leftarrow)$ المطلوب f متباين

$\forall v_1, v_2 \in V \; ; \; f(v_1) = f(v_2)$

$\Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = \theta_u$

نعلم أن $f(-v_2) = -f(v_2)$

$\Rightarrow f(v_1) + f(-v_2) = O_u$

$\Rightarrow f(v_1 - v_2) = O_u$

$\Rightarrow v_1 - v_2 \in \ker f = [O_v]$

$\Rightarrow v_1 - v_2 = O_v \Rightarrow v_1 = v_2$

وهو المطلوب فالتطبيق الخطي متباين

($\Leftarrow$) كفاية الشرط: نفرض f متباين

« فكرة الإثبات: نأخذ شعاع اختياري من $\ker f$ ونثبت أنه هو الصفر O_v »

الحل: f متباين ($\ker f = [O_v]$)

$\forall v \in \ker f \Rightarrow f(v) = O_u$ --- (1)

ومعلوم أن صورة O_v هو O_u

$\Rightarrow f(O_v) = O_u$ --- (2)

من (1) و (2) نجد أن

$\Rightarrow f(v) = f(O_u)$

$\overset{f \text{ متباين}}{\Rightarrow} v = O_v \Rightarrow \ker f = [O_v]$

(3) بعض العمليات على التطبيق الخطي:

(1): جمع تطبيقين خطيين:

تعريف: ليكن التطبيقان $f_1 : V \to U$ و $f_2 : V \to U$

نسمي التطبيق التالي $(f_1 + f_2) : V \to U$

والمعرف بالشكل $\forall v \in V$; $(f_1 + f_2)(v) = f_1(v) + f_2(v)$

هو حاصل جمع التطبيقين الخطيين f_1, f_2

تمرين: هل التطبيق $f_1 + f_2$ هو تطبيق خطي ؟

البرهان :

$(f_1+f_2)(v_1+v_2) \overset{?}{=} (f_1+f_2)(v_1) + (f_1+f_2)(v_2)$

$; \; v_1, v_2 \in V$

$\ell_1 = (f_1+f_2)(v_1+v_2) = f_1(v_1+v_2) + f_2(v_1+v_2)$

$= f_1(v_1) + f_1(v_2) + f_2(v_1) + f_2(v_2) \quad \ldots (1)$

$\ell_2 = (f_1+f_2)(v_1) + (f_1+f_2)(v_2)$

$= f_1(v_1) + f_1(v_2) + f_2(v_1) + f_2(v_2) \quad \ldots (2)$

من العلاقتين (1) و (2) نجد أن $\ell_1 = \ell_2$ وهو المطلوب

(2) : ضرب تطبيق خطي بعدد :

ليكن التطبيق الخطي $f : V \longrightarrow U$ والعدد α من الحقل K

يسمى التطبيق التالي $(\alpha f) : V \longrightarrow U$ والمعرف بالشكل

$(\alpha f)(v) = \alpha . f(v) \; ; \; \forall v \in V$

هو حاصل ضرب التطبيق الخطي $f : V \longrightarrow U$ بالعدد α

تمرين: ليكن التطبيق $\alpha f : V \longrightarrow U$ هو تطبيق خطي ؟

البرهان

$(\alpha . f)(v_1+v_2) \overset{?}{=} \alpha f(v_1) + \alpha f(v_2)$

$\alpha . (f(v_1+v_2)) = \alpha . (f(v_1) + f(v_2))$

$= (\alpha f)(v_1) + (\alpha f)(v_2)$

$= \alpha f(v_1) + \alpha f(v_2) = \ell_2$

ومنه $\ell_1 = \ell_2$ وهو المطلوب

المؤثرات الخطية :

تعريف : المؤثر الخطي هو تطبيق خطي منطلقه ومستقره نفس الفضاء الشعاعي يرمز عادةً للمؤثر الخطي من الفضاء الشعاعي V $f : V \to V$ بالرمز $T : V \to V$

مبرهنة : ليكن لدينا الفضائين الشعاعيين U و V المعرفان فوق الحقل العددي K

إن مجموعة كل التطبيقات الخطية من الفضاء الشعاعي V إلى الفضاء الشعاعي U والتي نرمز لها $Hom(V, U)$ هي فضاء شعاعي فوق الحقل K وذلك وفق العمليتين :

1) الداخلية : الجمع التطبيقين الخطيين
2) الخارجية : ضرب تطبيق خطي بعدد

إن الشعاع الصفري للفضاء الشعاعي $Hom(V, U)$ هو التطبيق الخطي الصفري $O : V \to U$

$$O(v) = o_u \; ; \; \forall v \in V$$

$$(O + f)(v) = O(v) + f(v) = o_u + f(v) = f(v)$$

« مبرهنة دون برهان »

قياس فضاء كل التطبيقات الخطية من $V \to U$

$$d\,[Hom(V, U)] = d(V) \times d(U)$$

انتهت المحاضرة الخامسة

مع تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح — إعداد : فاطمة الشمير